عنایت‌اله راستی‌زاده*
دبیر ریاضی دبیرستان‌های شیراز

تولید اعداد براساس رابطه‌های بازگشتی

کلیدواژه‌ها: دنباله بازگشتی، دنبالهٔ فیبوناتچی

اشاره

در کتاب درسی ریاضی ۲، تعریف و مفهوم دنباله‌ها در نخستین بخش مطرح شده است. در مقالهٔ حاضر می‌کوشیم به ردهٔ خاصی از دنباله‌های اعداد که براساس رابطه‌های بازگشتی معرفی می‌شوند، بپردازیم و پیرامون خواص آن‌ها مسائل متنوعی را مطرح کنیم.

● **تعریف:** «دنبالهٔ بازگشتی» دنباله‌ای از اعداد است که در آن، جمله یا جملاتی از دنباله، به‌عنوان جملات اولیه داده شده و جملات بعدی براساس روابطی که به جملات قبلی آن‌ها مرتبط است، به‌دست می‌آیند. این رابطه را رابطهٔ برگشتی دنباله می‌نامند.

مثال ۱. دنبالهٔ u_n را در نظر بگیرید که:

$$u_1 = 0; u_n = \sqrt{2+u_{n-1}} \quad (n \ge 2)$$

چند جملهٔ اولیهٔ دنباله به شرح زیر هستند:

$$u_2 = \sqrt{2+u_1} = \sqrt{2}$$
$$u_3 = \sqrt{2+u_2} = \sqrt{2+\sqrt{2}}$$
$$u_4 = \sqrt{2+u_3} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$
$$u_5 = \sqrt{2+u_4} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

این دنباله نمونه‌ای از یک دنبالهٔ بازگشتی است. همچنان که دیدیم، u_1 داده شده است و از جملهٔ دوم به بعد براساس رابطهٔ بازگشتی مذکور به‌دست می‌آید.

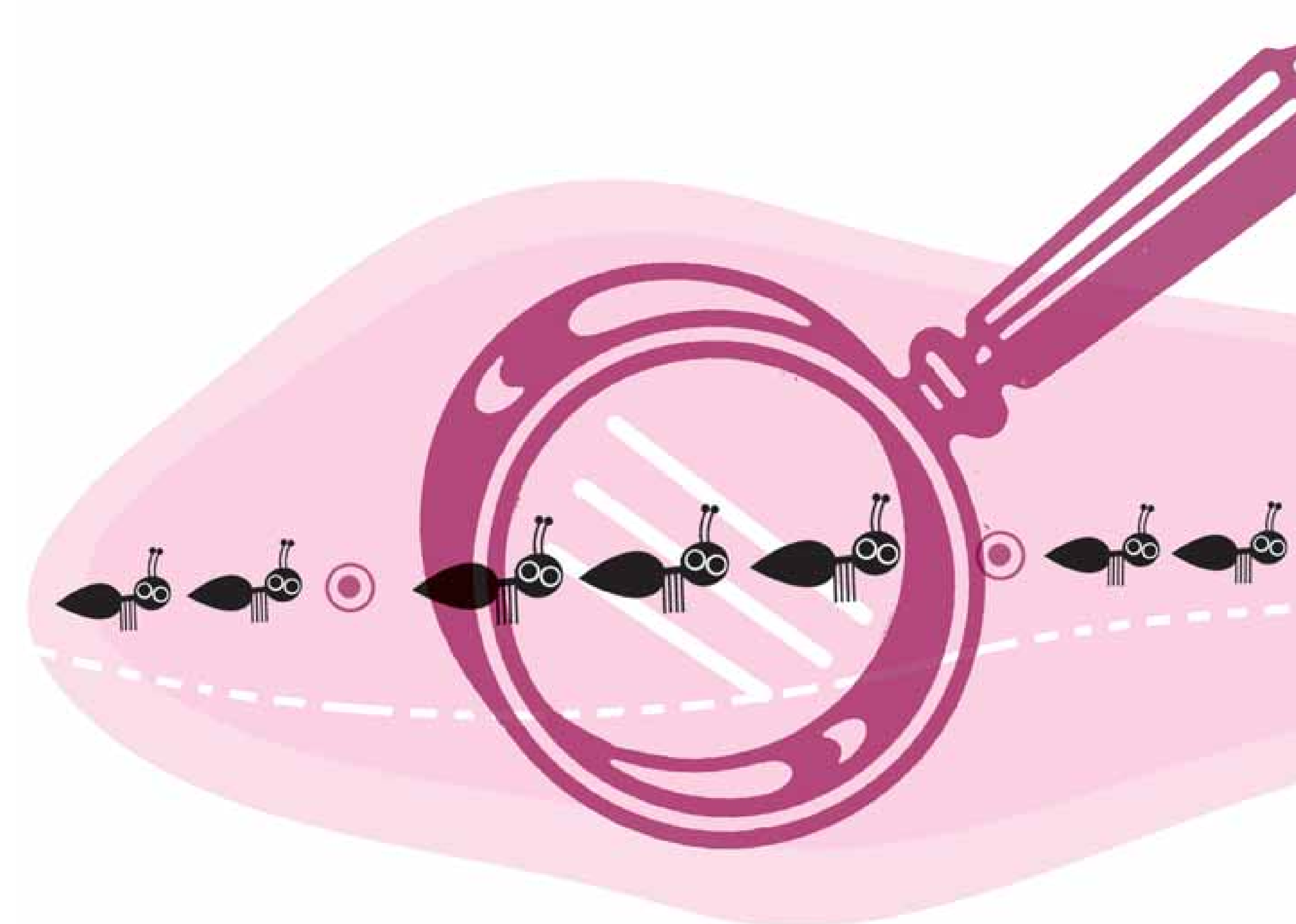
مثال ۲. به دنبالهٔ عددی زیر توجه کنید:

$$1, 11, 111, 1111, 11111, \ldots$$

تلاش می‌کنیم به جملهٔ عمومی این دنباله دست یابیم. داریم:

$$a_1=1 , a_2=11=1+10=a_1+10$$
$$a_3=111=11+100=a_2+10^2$$
$$a_4=1111=111+1000=a_3+10^3$$
$$a_5=11111=1111+10000=a_4+10^4$$

از این الگو می‌توان نتیجه گرفت که رابطهٔ بازگشتی دنباله



به‌صورت زیر است:

$a_n=a_{n-۱}+۱۰^{n-۱}$

و شرط اولیهٔ دنباله: $a_۱=۱$

تذکر: می‌توان جملهٔ عمومی دنباله را با رابطه‌ای غیربازگشتی به‌صورت $a_n=\frac{۱}{۹}(۱۰^n-۱)$ نیز نوشت.

مثال ۳. دنبالهٔ فیبوناتچی دنباله‌ای بازگشتی است که نام آن از ریاضی‌دانی ایتالیایی به‌همین نام گرفته شده است. این دنباله که دارای خواص متعدد و جالبی است، به‌صورت زیر است:

۱,۱,۲,۳,۵,۸,۱۳,۲۱,۳۴,۵۵,۸۹, ...

در این دنباله، جملات اول و دوم برابر با ۱ و از جمله سوم به بعد، هر جمله برابر است با مجموع دو جملهٔ قبلی آن یعنی:

$F_۱=F_۲=۱ , F_n=F_{n-۱}+F_{n-۲} \quad (n\geq ۳)$

● **مسئله:** اگر F_n جملهٔ nام دنبالهٔ فیبوناتچی و S_n مجموع n جملهٔ نخست دنباله باشد، درستی رابطهٔ $S_n=۲F_n+F_{n-۱}-۱$ را برای $n=۲,۳,۴,۵$ تحقیق کنید.

● **حل:** با $n=۲$ شروع می‌کنیم. داریم:

$S_۲=۲F_۲+F_۱-۱=۲(۱)+۱-۱=۲$

که درست است. همچنین برای $S_۳$ داریم:

$S_۳=F_۱+F_۲+F_۳=۲F_۳=۲F_۳+F_۲-۱$

به بررسی الگو برای مراتب بعدی ادامه می‌دهیم:

$S_۴=F_۱+F_۲+F_۳+F_۴=F_۱+F_۴+F_۴=۲F_۴+F_۱$

اما: $F_۱=F_۳-۱$، پس: $S_۴=۲F_۴+F_۳-۱$ و بالاخره برای $S_۵$ داریم:

$S_۵=F_۱+F_۲+F_۳+F_۴+F_۵=۲F_۵+F_۳$

اما: $F_۳=F_۴-۱$، پس: $S_۵=۲F_۵+F_۴-۱$.

تذکر: رابطهٔ بازگشتی اخیر برای S_n، برای هر n طبیعی برقرار است. اما اثبات آن از حیطهٔ ریاضیات دوم دبیرستان خارج است و نیازمند اطلاع از مفهوم استقرای ریاضی است.

مثال ۴. رابطهٔ بازگشتی دنبالهٔ زیر را به‌دست آورید:

۰,-۱,-۲,۳,-۱,-۲,۳,-۱,-۲,۳,...

توجه داشته باشیم، در اینجا به‌جز سه جملهٔ نخست، از چهارمین جمله به بعد، هر جمله قرینهٔ مجموع دو جملهٔ قبل از آن است:

مثلاً: $۳=-(-۱-۲)$، یا: $-(۳+(-۲))=-۱$ = جملهٔ پنجم

پس می‌توان نوشت:

$a_۱=۰ , a_۲=-۱ , a_۳=-۲ , a_n=-(a_{n-۱}+a_{n-۲}) \quad (n\geq ۴)$

نظم موجود در جملات دنبالهٔ فوق شایستهٔ توجه است.

یکی از سؤالاتی که غالباً مطرح می‌شود، این است که: آیا در هر دنبالهٔ بازگشـــتی می‌توان رابطه‌ای یافت که جملهٔ nام دنباله مســـتقل از رابطهٔ بازگشتی داده شده و تنها براساس عبارتی برحسب n مشخص کند؟

برای نمونه، آیا می‌توان در دنبالهٔ فیبوناتچی که ذکر آن رفت، مثلاً جملهٔ بیستم را بدون محاسبهٔ جملات هیجدهم و نوزدهم پیدا کرد؟

در پاســخ به این پرســش باید گفت، یافتن دستور جملهٔ عمومی دنباله همواره کار ســاده‌ای نیســت و در بعضی موارد خارج از محدودهٔ ریاضیات دبیرســتانی اســت. مثلاً دربارهٔ دنبالهٔ فیبوناتچی همین‌قدر بدانیم که دستور F_n به‌صورت زیر است:

$$F_n=\frac{۱}{\sqrt{۵}}\left[(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲})^{n+۱}-(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲})^{n+۱}\right]\quad (n\geq ۱)$$

بـــا وجودی کـــه جمله‌های این دنباله همگی عددهایی درســـت و مثبت‌اند، ولی جملهٔ عمومی این دنباله، با رابطه‌ای بیان می‌شود که به کمک عددهای گنگ تنظیم شده است!

در مثال بعدی، به نمونه‌ای ساده در همین ارتباط می‌پردازیم:

مثـــال ۵. دنبالـــهٔ $\{a_n\}$ با ضابطهٔ $a_na_{n-۱}+۱=۲a_n$ و شـــرط $a_۱=\frac{۱}{۲}$ مفروض است؛ $a_{۱۳۹۳}$ را بیابید.

واضح است که یافتن جملهٔ $a_{۱۳۹۳}$، آن هم با توجه به رابطهٔ برگشتی، کار ناصوابی اســت. لذا تلاش می‌کنیـــم جملهٔ عمومی دنباله را فارغ از فرمول‌های بازگشـــتی پیدا کنیم. با محاســـبهٔ تعدادی از جملات، حل مسئله را پیش می‌بریم:

$$a_۱=\frac{۱}{۲}: a_۲a_۱+۱=۲a_۲\Rightarrow \frac{۱}{۲}a_۲+۱=۲a_۲\Rightarrow a_۲=\frac{۲}{۳}$$

$$a_۲=\frac{۲}{۳}: a_۳a_۲+۱=۲a_۳\Rightarrow \frac{۲}{۳}a_۳+۱=۲a_۳\Rightarrow a_۳=\frac{۳}{۴}$$

$$a_۳=\frac{۳}{۴}: a_۴a_۳+۱=۲a_۴\Rightarrow \frac{۳}{۴}a_۴+۱=۲a_۴\Rightarrow a_۴=\frac{۴}{۵}$$

به‌همین ترتیب، نتیجه می‌شود:

$$a_n=\frac{n}{n+۱}$$

(این مطلب را می‌توان با استفاده از مفهوم استقرای ریاضی، به‌طور دقیق نشان داد.)

بنابراین:

$$a_{۱۳۹۳}=\frac{۱۳۹۳}{۱۳۹۴}$$

مثـــال بعـــدی از کتـــاب تصاعدهـــا و لگاریتـــم، تألیـــف زنده‌یـــاد **عبدالحسین مصحفی** (چاپ ۱۳۷۰) انتخاب شده است.

مثال ۶. اولاً، تعداد شش جملهٔ نخست از دنبالهٔ با رابطهٔ بازگشتی زیر را بنویسید:

$$u_n=u_{n-۲}+۴(n-۱),\ u_۱=۱,\ u_۲=۴$$

ثانیاً، جملهٔ عمومی این دنباله را به‌دست آورید و از روی آن درستی رابطهٔ بالا را تحقیق کنید.

● **حل:** اولاً خواهیم داشت:

$$u_۳=u_۱+۴(۳-۱)=۱+۸=۹$$
$$u_۴=u_۲+۴(۴-۱)=۴+۱۲=۱۶$$
$$u_۵=u_۳+۴(۵-۱)=۹+۱۶=۲۵$$
$$u_۶=u_۴+۴(۶-۱)=۱۶+۲۰=۳۶$$

پس دنباله به شرح زیر است:

۱,۴,۹,۱۶,۲۵,۳۶,...

ثانیاً، مشاهده می‌شود که $u_n=n^۲$ و در نتیجه $u_{n-۲}=(n-۲)^۲$ و برای تحقیق درستی رابطهٔ بازگشتی داده شده، داریم:

$$u_n-u_{n-۲}=n^۲-(n-۲)^۲=n^۲-n^۲+۴n-۴=۴(n-۱)$$

یعنی: $u_n-u_{n-۲}=۴(n-۱)$ و بنابراین درستی رابطه ثابت شد.

۱. در دنباله‌ای که با رابطهٔ بازگشـــتی $a_n=(a_{n-۱})^۲-n$ و جملهٔ اول $a_۱=۰$ مشـــخص می‌شـــود، شش جملهٔ اول را به‌دست آورید.

۲. رابطهٔ بازگشتی دنباله‌های زیر را به‌دست آورید:

الف) ۲,۲۲,۲۲۲,۲۲۲۲,...

ب) ۴,۶,۱۰,۱۸,۳۴

۳. دنبالهٔ $\{u_n\}$ به این ترتیب تعریف شده است:

$$u_۰=۲, u_۱=\frac{۵}{۲}, u_{n+۱}=u_n(u_{n-۱}^۲-۲)-u_۱\quad (n\geq ۱)$$

اولاً، جملات $u_۲$ و $u_۳$ و $u_۴$ و $u_۵$ را بیابید.

ثانیاً، اگر دنبالهٔ $\{b_n\}$ به این ترتیب تعریف شود که:

$$b_n=\frac{۱}{۳}(۲^n-(-۱)^n)\quad (n\geq ۱)$$

تعداد پنج جملهٔ نخست دنبالهٔ $c_n=۲^{(b_n)}+۲^{(-b_n)}$ $(n\geq۱)$ را به‌دست آورید.

ثالثاً، از دو قسمت قبل چه موضوعی را می‌توان مشاهده کرد؟

* erastizadeh@yahoo.com